

РАСЧЁТ ШИРИНЫ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОЛОННЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

ОПИСАНИЕ ПРИМЕРА

Рассматривается колонна промышленного здания с сечением шириной $b = 400$ мм и высотой $h = 500$ мм. Используется тяжёлый бетон класса В15 и арматура класса А400. Площадь сечения растянутой и сжатой арматуры $A_s = A'_s = 1\,232$ мм² ($2\emptyset 28$). Защитные слои арматуры $a = a' = 50$ мм.

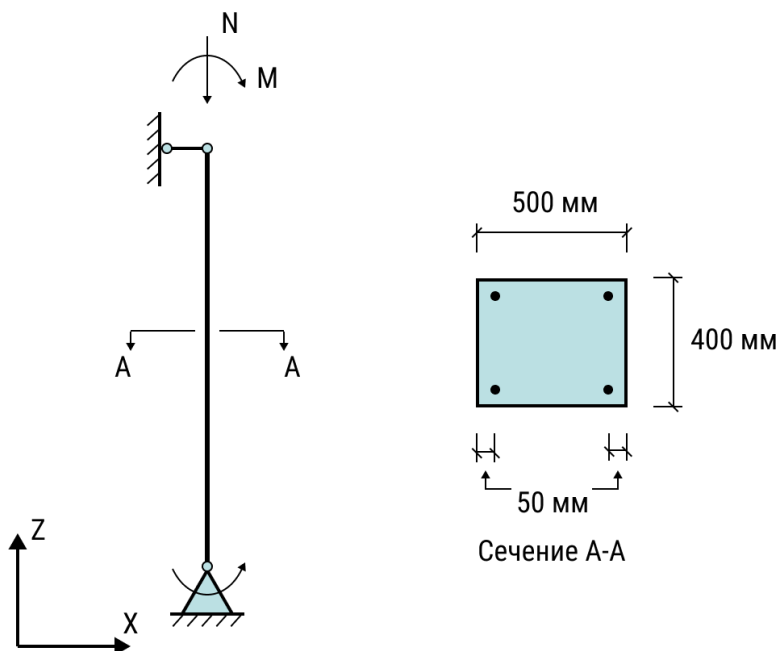
Продольные силы и изгибающие моменты в сечении от нагрузок:

- вертикальных постоянных и длительных $N_l = 500$ кН, $M_l = 150$ кН · м;
- ветровых $M_h = 90$ кН · м.

Определяется ширина раскрытия трещин при действии длительной и полной нагрузки.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для получения требуемых усилий в сечении колонны условия опирания и приложение нагрузок моделируются упрощённо.



Свойства сечения

$h = 500$ мм	– высота сечения
$b = 400$ мм	– ширина сечения
$a = a' = 50$ мм	– защитный слой до центра тяжести растянутой и сжатой арматуры
$A_s = A'_s = 1\,232$ мм ²	– площадь сечения растянутой и сжатой продольной арматуры

Свойства материалов

Бетон В15

$E_b = 24\,000\,000 \text{ кН/м}^2$	– модуль упругости
$R_{bn} = 11\,000 \text{ кН/м}^2$	– нормативное сопротивление сжатию

Арматура А400 – продольная

$E_s = 200\,000\,000 \text{ кН/м}^2$	– модуль упругости
$R_{sn} = 400\,000 \text{ кН/м}^2$	– нормативное сопротивление

Коэффициенты

$\gamma_{b,ser} = 1.0$	– коэффициент надёжности по бетону при сжатии (2 ПС)
$\gamma_{bt,ser} = 1.0$	– коэффициент надёжности по бетону при растяжении (2 ПС)
$\gamma_{s,ser} = 1.0$	– коэффициент надёжности по арматуре (2 ПС)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ

Расчёт производится с использованием формул раздела 8 [1].

Согласно формуле 6.1 и положениям п. 6.1.12 [1] определяем расчётное сопротивление бетона осевому сжатию (2 ПС):

$$R_{b,ser} = \frac{R_{bn}}{\gamma_{b,ser}} = \frac{11\,000}{1.0} = 11\,000 \text{ кПа.}$$

Согласно формуле 6.2 и положениям п. 6.1.12 [1] определяем расчётное сопротивление бетона осевому растяжению (2 ПС):

$$R_{bt,ser} = \frac{R_{btn}}{\gamma_{bt,ser}} = \frac{1\,100}{1.0} = 1\,100 \text{ кПа.}$$

Согласно формуле 6.10 и положениям п. 6.2.8 [1] определяем расчётное сопротивление продольной арматуры класса А400 на растяжение (2 ПС):

$$R_{s,ser} = \frac{R_{sn}}{\gamma_{s,ser}} = \frac{400\,000}{1.0} = 400\,000 \text{ кПа.}$$

Максимальные усилия в элементе от длительной нагрузки:

$$N_{\text{длит}} = 500 \text{ кН;}$$

$$M_{\text{длит}} = 150 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

от полной нагрузки:

$$N_{\text{полн}} = N_l + N_h = 500 + 0 = 500 \text{ кН;}$$

$$M_{\text{полн}} = M_l + M_h = 150 + 90 = 240 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Находим характеристики приведённого сечения без трещины.

Коэффициент приведения арматуры к бетону согласно п. 8.2.12 [1]:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_b} = \frac{200\,000\,000}{24\,000\,000} = 8.333.$$

Площадь бетона в сечении $A_b = b \cdot h = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2 \text{ м}^2$, площадь арматуры в сечении $A_s = A'_s = 0.001232 \text{ м}^2$.

Площадь приведённого сечения без трещины находим по формуле 8.126 [1]:

$$A_{red,full} = A_b + A_s \cdot \alpha + A'_s \cdot \alpha = 0.2 + 2 \cdot 0.001232 \cdot 8.333 = 0.22053 \text{ м}^2.$$

Расстояние от центра тяжести приведённого сечения без трещины до низа сечения (самого растянутого волокна) для сечения с симметричной арматурой:

$$y_{bot,red,full} = \frac{h}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \text{ м}.$$

Момент инерции бетона и арматуры в приведённом сечении без трещины:

$$I_{b,red,full} = \frac{b \cdot h^3}{12} = 0.00417 \text{ м}^4;$$

$$I_{s+s',red,full} = A_s \cdot (y_{bot,red,full} - a)^2 + A'_s \cdot (h - y_{bot,red,full} - a')^2 = 2 \cdot 0.001232 \cdot (0.25 - 0.05)^2 = 0.00010 \text{ м}^4.$$

Момент инерции приведённого сечения без трещины находим по формуле 8.125 [1]:

$$I_{red,full} = I_{b,red,full} + I_{s+s',red,full} \cdot \alpha = 0.00417 + 0.00010 \cdot 8.333 = 0.00499 \text{ м}^4.$$

Момент сопротивления приведённого сечения без трещины находим по формуле 8.123 [1]:

$$W_{red,full} = \frac{I_{red,full}}{y_{bot,red,full}} = \frac{0.00499}{0.25} = 0.01995 \text{ м}^3.$$

Пластический момент сопротивления находим по формуле 8.122 [1]:

$$W_{pl,full} = 1.3 \cdot W_{red,full} = 1.3 \cdot 0.01995 = 0.02594 \text{ м}^3.$$

Момент трещинообразования согласно формуле 8.121 [1]:

$$M_{crc} = R_{bt,ser} \cdot W_{pl,full} + N_{полн} \cdot e = 1\,100 \cdot 0.02594 + 500 \cdot 0.0905 = 73.77 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{длит} = 90 \text{ кН} > M_{crc};$$

$$M_{полн} = 240 \text{ кН} > M_{crc},$$

где

$$e = \frac{W_{pl,full}}{A_{red,full}} = \frac{0.02594}{0.22053} = 0.0905 \text{ м},$$

то есть трещины образуются.

Находим характеристики приведённого сечения с трещиной.

Коэффициент приведения арматуры к бетону согласно формулам 8.130 и 8.131 [1]:

$$E_{b,red} = \frac{R_{bn}}{\varepsilon_{b1,red}} = \frac{11\,000}{0.0015} = 7\,333\,333 \text{ кПа};$$

$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}} = \frac{200\,000\,000}{7\,333\,333} = 27.273;$$

$$\alpha_{s2} = \alpha_{s1}.$$

Положение нейтральной оси (высота сжатой зоны) определяется по формуле 8.153 [1]:

$$y_N = \frac{I_{b0} + \alpha_{s1} \cdot I_{sc0} + \alpha_{s2} \cdot I_{s0}}{S_{b0} + \alpha_{s1} \cdot S_{sc0} - \alpha_{s2} \cdot S_{s0}},$$

где моменты инерции и статические моменты сжатой зоны бетона, растянутой и сжатой арматуры определяются как:

$$I_{b0} = \frac{b \cdot x_m^3}{12} + b \cdot x_m \cdot \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot x_m^3}{3};$$

$$I_{sc0} = A'_s \cdot \left[\frac{h}{2} - a' - \left(\frac{h}{2} - x_m\right)\right]^2 = A'_s \cdot (x_m - a')^2;$$

$$I_{s0} = A_s \cdot \left[\frac{h}{2} - a + \left(\frac{h}{2} - x_m\right)\right]^2 = A_s \cdot (h - a - x_m)^2;$$

$$S_{b0} = b \cdot x \cdot \frac{x_m}{2} = \frac{b \cdot x_m^2}{2};$$

$$S_{sc0} = A'_s \cdot (x_m - a');$$

$$S_{s0} = A_s \cdot (h - a - x_m).$$

То есть:

$$y_N = \frac{\frac{b \cdot x_m^3}{3} + \alpha_{s1} \cdot A'_s \cdot (x_m - a')^2 + \alpha_{s2} \cdot A_s \cdot (h - a - x_m)^2}{\frac{b \cdot x_m^2}{2} + \alpha_{s1} \cdot A'_s \cdot (x_m - a') - \alpha_{s2} \cdot A_s \cdot (h - a - x_m)},$$

где

$y_N = e_0 - \frac{h}{2} + x_m = \frac{M}{N} - \frac{h}{2} + x_m$ – расстояние от нейтральной оси до точки приложения продольной силы N , отстоящей от центра тяжести полного сечения (без учета трещин);

x_m – высота сжатой зоны бетона.

Решая уравнение для полных нагрузок $M_{полн}$ и $N_{полн}$, получаем $x_m^{полн} = 0.231$ м. Проверим:

$$y_N^{полн} = \frac{240}{500} - \frac{0.5}{2} + 0.231 = 0.461 \text{ м};$$

$$\frac{0.4 \cdot 0.231^3}{3} + 27.273 \cdot 0.001232 \cdot (0.231 - 0.05)^2 + 27.273 \cdot 0.001232 \cdot (0.5 - 0.05 - 0.231)^2 =$$
$$\frac{0.4 \cdot 0.231^2}{2} + 27.273 \cdot 0.001232 \cdot (0.231 - 0.05) - 27.273 \cdot 0.001232 \cdot (0.5 - 0.05 - 0.231)$$
$$= 0.461 \text{ м.}$$

Площадь сжатого бетона в сечении $A_{bc}^{\text{полн}} = b \cdot x_m^{\text{полн}} = 0.4 \cdot 0.231 = 0.09253 \text{ м}^2$, площадь арматуры в сечении $A_s = A'_s = 0.001232 \text{ м}^2$.

Находим площадь приведённого сечения с трещиной:

$$A_{red}^{\text{полн}} = A_{bc}^{\text{полн}} + A_s \cdot \alpha_{s2} + A'_s \cdot \alpha_{s1} = 0.09253 + 2 \cdot 0.001232 \cdot 27.273 = 0.15973 \text{ м}^2.$$

Статический момент приведённого сечения с трещиной относительно верха сечения:

$$S_{top,red}^{\text{полн}} = b \cdot x_m^{\text{полн}} \cdot \frac{x_m^{\text{полн}}}{2} + \alpha_{s2} \cdot A_s \cdot h_0 + \alpha_{s1} \cdot A'_s \cdot a' =$$
$$= 0.4 \cdot 0.231 \cdot \frac{0.231}{2} + 27.273 \cdot 0.001232 \cdot (0.49 + 0.05) = 0.02750 \text{ м}^3.$$

Расстояние от центра тяжести приведённого сечения с трещиной до верха сечения:

$$y_{top,red}^{\text{полн}} = \frac{S_{top,red}^{\text{полн}}}{A_{red}^{\text{полн}}} = \frac{0.02750}{0.15973} = 0.172 \text{ м.}$$

Момент инерции сжатого бетона и арматуры в приведённом сечении с трещиной:

$$I_{bc,red}^{\text{полн}} = \frac{b \cdot (x_m^{\text{полн}})^3}{12} + b \cdot x_m^{\text{полн}} \cdot \left(y_{top,red}^{\text{полн}} - \frac{x_m^{\text{полн}}}{2} \right)^2 = \frac{0.4 \cdot 0.231^3}{12} + 0.4 \cdot 0.231 \cdot \left(0.172 - \frac{0.231}{2} \right)^2 =$$
$$= 0.00071 \text{ м}^4;$$

$$I_{s,red}^{\text{полн}} = A_s \cdot (h_0 - y_{top,red}^{\text{полн}})^2 = 0.001232 \cdot (0.45 - 0.170)^2 = 0.00010 \text{ м}^4;$$

$$I_{s',red}^{\text{полн}} = A'_s \cdot (y_{top,red}^{\text{полн}} - a')^2 = 0.001232 \cdot (0.170 - 0.05)^2 = 0.00002 \text{ м}^4;$$

Момент инерции приведённого сечения с трещиной находим по формуле 8.148 [1]:

$$I_{red}^{\text{полн}} = I_{bc,red}^{\text{полн}} + I_{s,red}^{\text{полн}} \cdot \alpha_{s2} + I_{s',red}^{\text{полн}} \cdot \alpha_{s1} = 0.00071 + 27.273 \cdot (0.00010 + 0.00002) = 0.00380 \text{ м}^4.$$

Аналогично для длительных нагрузок $M_{\text{длит}}$ и $N_{\text{длит}}$:

$$x_m^{\text{длит}} = 0.276 \text{ м};$$

$$A_{bc}^{\text{длит}} = 0.11044 \text{ м}^2;$$

$$A_{red}^{\text{длит}} = 0.17764 \text{ м}^2;$$

$$S_{top,red}^{\text{длит}} = 0.03205 \text{ м}^3;$$

$$y_{top,red}^{\text{длит}} = 0.180 \text{ м};$$

$$I_{bc,red}^{\text{длит}} = 0.00090 \text{ м}^4;$$

$$I_{s,red}^{\text{длит}} = 0.00009 \text{ м}^4;$$

$$I_{s',red}^{\text{длит}} = 0.00002 \text{ м}^4;$$

$$I_{red}^{длит} = 0.00391 \text{ м}^4.$$

Аналогично для момента трещинообразования M_{crc} и $N_{полн}$:

$$x_m^{crc} = 0.408 \text{ м};$$

$$A_{bc}^{crc} = 0.16308 \text{ м}^2;$$

$$A_{red}^{crc} = 0.23028 \text{ м}^2;$$

$$S_{top,red}^{crc} = 0.05005 \text{ м}^3;$$

$$y_{top,red}^{crc} = 0.217 \text{ м};$$

$$I_{bc,red}^{crc} = 0.00226 \text{ м}^4;$$

$$I_{s,red}^{crc} = 0.00007 \text{ м}^4;$$

$$I_{si,red}^{crc} = 0.00003 \text{ м}^4;$$

$$I_{red}^{crc} = 0.00502 \text{ м}^4.$$

Определим некоторые вспомогательные параметры для расчёта ширины раскрытия трещин.

Напряжение в растянутой арматуре определяется по формуле 8.134 [1]:

$$\sigma_s = \left(\frac{M \cdot (h_0 - y_{top,red})}{I_{red}} - \frac{N}{A_{red}} \right) \cdot \alpha_{s1},$$

где

момент определяется как $M = M - N \cdot e_0$;

$e_0 = \frac{h}{2} - y_{top,red}$ – расстояние от точки приложения внешней продольной силы N до центра тяжести приведённого сечения.

Напряжение в растянутой арматуре сразу после образования трещины:

$$\begin{aligned} \sigma_{s,crc} &= \left(\frac{\left[M_{crc} - N_{полн} \cdot \left(\frac{h}{2} - y_{top,red}^{crc} \right) \right] \cdot (h_0 - y_{top,red}^{crc})}{I_{red}^{crc}} - \frac{N_{полн}}{A_{red}^{crc}} \right) \cdot \alpha_{s1} = \\ &= \left(\frac{\left[73.77 - 500 \cdot \left(\frac{0.5}{2} - 0.217 \right) \right] \cdot (0.45 - 0.217)}{0.00502} - \frac{500}{0.23028} \right) \cdot 27.273 = 13\,396 \text{ кПа}. \end{aligned}$$

где

$h_0 = h - a = 0.5 - 0.05 = 0.45 \text{ м}$ – рабочая высота сечения.

Напряжение в растянутой арматуре при действии полной нагрузки:

$$\sigma_s = \left(\frac{\left[M_{полн} - N_{полн} \cdot \left(\frac{h}{2} - y_{top,red}^{полн} \right) \right] \cdot (h_0 - y_{top,red}^{полн})}{I_{red}^{полн}} - \frac{N_{полн}}{A_{red}^{полн}} \right) \cdot \alpha_{s1} =$$

$$= \left(\frac{[240 - 500 \cdot (\frac{0.5}{2} - 0.172)] \cdot (0.45 - 0.172)}{0.00380} - \frac{500}{0.15973} \right) \cdot 27.273 =$$
$$= 315\,256 \text{ кПа} < R_{s,ser} = 400\,000 \text{ кПа.}$$

Напряжение в растянутой арматуре при действии длительной составляющей нагрузки:

$$\sigma_{s,l} = \left(\frac{[M_{длит} - N_{длит} \cdot (\frac{h}{2} - y_{top,red}^{длит})] \cdot (h_0 - y_{top,red}^{длит})}{I_{red}^{длит}} - \frac{N_{длит}}{A_{red}^{длит}} \right) \cdot \alpha_{s1} =$$
$$= \left(\frac{[150 - 500 \cdot (\frac{0.5}{2} - 0.180)] \cdot (0.45 - 0.180)}{0.00391} - \frac{500}{0.17764} \right) \cdot 27.273 =$$
$$= 139\,692 \text{ кПа} < R_{s,ser} = 400\,000 \text{ кПа.}$$

Находим коэффициенты ψ_s для длительной и полной нагрузки по формуле 8.137 [1]:

$$\psi_s = 1 - 0.8 \cdot \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_s} = 1 - 0.8 \cdot \frac{13\,396}{315\,256} = 0.966;$$

$$\psi_{s,l} = 1 - 0.8 \cdot \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_{s,l}} = 1 - 0.8 \cdot \frac{13\,396}{139\,692} = 0.923.$$

Находим значение базового расстояния между трещинами по формуле 8.136 [1], принимая диаметр стержней $d_s = 28$ мм:

$$l_s = 0.5 \cdot \frac{A_{bt}}{A_s} \cdot d_s = 0.5 \cdot \frac{0.1}{0.001232} \cdot 0.028 = 1.136 \text{ м} > 0.400 \text{ м};$$

$$l_s = 0.400 \text{ м,}$$

где

$$A_{bt} = b \cdot y_{bot,red,full} = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \text{ м}^2 - \text{площадь растянутой зоны бетона};$$

$$2 \cdot a = 0.1 \text{ м} \leq y_{bot,red,full} = 0.25 \text{ м} \leq 0.5 \cdot h = 0.25 \text{ м.}$$

Находим ширину раскрытия трещин.

От продолжительного действия длительной составляющей нагрузки согласно п. 8.2.15 и формуле 8.128 [1]:

$$\varphi_1 = 1.4;$$

$$\varphi_2 = 0.5;$$

$$\varphi_3 = 1.0;$$

$$a_{crc,1} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_{s,l} \cdot \frac{\sigma_{s,l}}{E_s} \cdot l_s = 1.4 \cdot 0.5 \cdot 1.0 \cdot 0.923 \cdot \frac{139\,692}{200\,000\,000} \cdot 0.4 = 0.181 \text{ мм.}$$

От непродолжительного действия полной нагрузки согласно п. 8.2.15 и формуле 8.128 [1]:

$$\varphi_1 = 1.0;$$

$$\varphi_2 = 0.5;$$

$$\varphi_3 = 1.0;$$

$$a_{crc,2} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot l_s = 1.0 \cdot 0.5 \cdot 1.0 \cdot 0.966 \cdot \frac{315\,256}{200\,000\,000} \cdot 0.4 = 0.305 \text{ мм.}$$

От непродолжительного действия длительной составляющей нагрузки согласно п. 8.2.15 и формуле 8.128 [1]:

$$\varphi_1 = 1.0;$$

$$\varphi_2 = 0.5;$$

$$\varphi_3 = 1.0;$$

$$a_{crc,3} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_{s,l} \cdot \frac{\sigma_{s,l}}{E_s} \cdot l_s = 1.0 \cdot 0.5 \cdot 1.0 \cdot 0.923 \cdot \frac{139\,692}{200\,000\,000} \cdot 0.4 = 0.129 \text{ мм.}$$

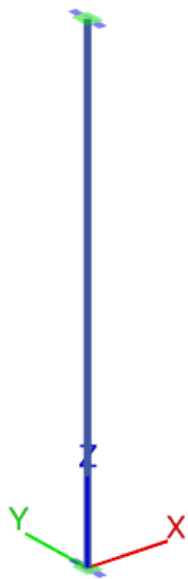
Ширина продолжительного раскрытия трещин определяется согласно формуле 8.119 [1]:

$$a_{crc,l} = a_{crc,1} = 0.181 \text{ мм} < a_{crc,l,ult} = 0.300 \text{ мм.}$$

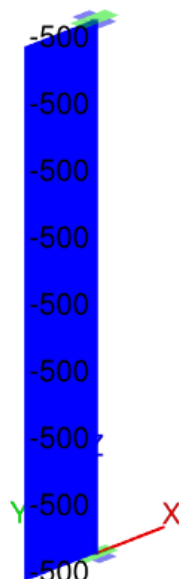
Ширина непродолжительного раскрытия трещин определяется согласно формуле 8.120 [1]:

$$a_{crc} = a_{crc,1} + a_{crc,2} - a_{crc,3} = 0.181 + 0.305 - 0.129 = 0.356 \text{ мм} < a_{crc,ult} = 0.400 \text{ мм.}$$

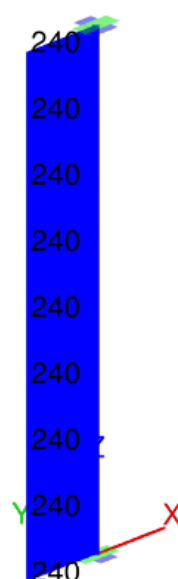
РАСЧЁТ В ПЛАГИНЕ



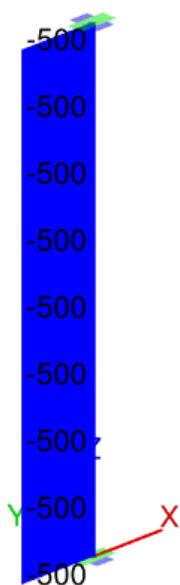
Общий вид модели



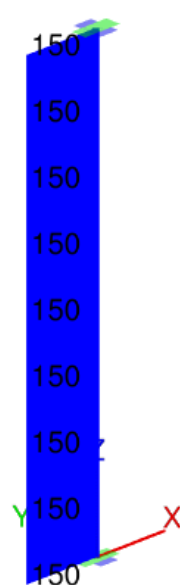
Продольные усилия от полных нагрузок, кН



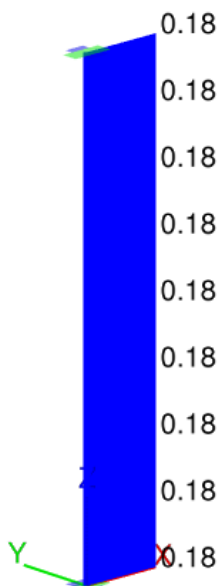
Изгибающие моменты от полных нагрузок, кН·м



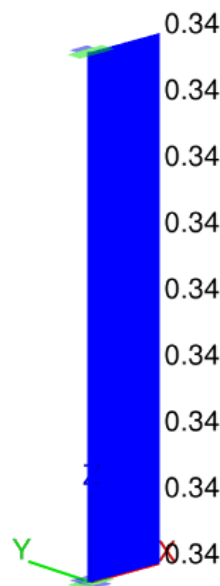
Продольные усилия от длительных нагрузок, кН



Изгибающие моменты от длительных нагрузок, кН·м



Ширина продолжительного раскрытия трещин, мм



Ширина непродолжительного раскрытия трещин, мм

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Параметр для сравнения	SV Plugins	Аналитический расчёт	Отн. погрешность, %
Ширина продолжительного раскрытия трещин, мм	0.181	0.181	0.0
Ширина непродолжительного раскрытия трещин, мм	0.337	0.356	5.4

ССЫЛКИ

1. СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (с Изменением N 1). Москва, 2019.