

## ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОЛОННЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ НА КОСОЕ ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

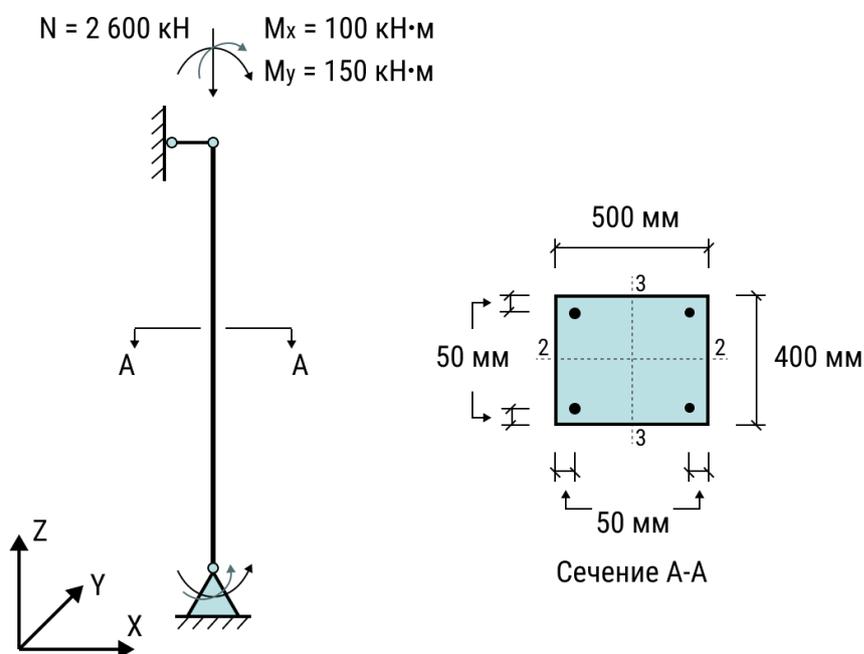
### ОПИСАНИЕ ПРИМЕРА

Рассматривается железобетонная колонна с сечением шириной  $b = 400$  мм и высотой  $h = 500$  мм. Используется тяжёлый бетон класса В25 и арматура класса А400. Площадь сечения растянутой и сжатой арматуры  $A_s = A'_s = 1\,609$  мм<sup>2</sup> (2Ø32). Защитные слои арматуры  $a = a' = 50$  мм.

В сечении колонны действует продольная сила  $N = 2\,600$  кН и изгибающие моменты в двух плоскостях  $M_x = 100$  кН·м и  $M_y = 150$  кН·м. Моменты даны с учётом прогиба колонны. Определяется прочность колонны при косом внецентренном сжатии.

### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для получения требуемых усилий в сечении колонны условия опирания и приложение нагрузок моделируются упрощённо.



#### Свойства сечения

$h = 500$ мм	– высота сечения
$b = 400$ мм	– ширина сечения
$a = a' = 50$ мм	– защитный слой до центра тяжести растянутой и сжатой арматуры
$A_s = A'_s = 1\,609$ мм <sup>2</sup>	– площадь сечения растянутой и сжатой продольной арматуры

Свойства материалов

Бетон В25

$E_b = 30\,000\,000 \text{ кН/м}^2$	– модуль упругости
$R_{bn} = 18\,500 \text{ кН/м}^2$	– нормативное сопротивление сжатию

Арматура А400 – продольная

$E_s = 200\,000\,000 \text{ кН/м}^2$	– модуль упругости
$R_{sn} = 400\,000 \text{ кН/м}^2$	– нормативное сопротивление

Коэффициенты

$\gamma_b = 1.3$	– коэффициент надёжности по бетону при сжатии
$\gamma_{b1} = 1.0$	– коэффициенты условий работы бетона
$\gamma_{b2} = 1.0$	
$\gamma_{b3} = 1.0$	
$\gamma_{b4} = 1.0$	
$\gamma_{b5} = 1.0$	
$\gamma_s = 1.15$	– коэффициент надёжности по арматуре

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ**

Расчёт производится с использованием формул раздела 8 [1].

Определяем расчётные характеристики бетона и арматуры.

Согласно формуле 6.1 и положениям п. 6.1.12 [1] определяем расчётное сопротивление бетона осевому сжатию:

$$R_b = \frac{R_{bn}}{\gamma_b} \cdot \gamma_{b1} \cdot \gamma_{b2} \cdot \gamma_{b3} \cdot \gamma_{b4} \cdot \gamma_{b5} = \frac{18\,500}{1.3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 = 14\,231 \text{ кПа.}$$

Согласно формуле 6.10 и положениям п. 6.2.8 [1] определяем расчётное сопротивление продольной арматуры класса А400 на растяжение и сжатие:

$$R_s = \frac{R_{sn}}{\gamma_s} = \frac{400\,000}{1.15} = 347\,826 \text{ кПа;}$$

$$R_{sc} = R_s = 347\,826 \text{ кПа} < 400\,000 \text{ кПа.}$$

Определяем относительные деформации бетона и арматуры. Для двухлинейной диаграммы работы бетона согласно п. 6.1.19 [1]:

$$\varepsilon_{b1} = \frac{R_b}{E_{b,red}} = \varepsilon_{b1,red} = 0.0015;$$

<https://svplugins.com>

$$\varepsilon_{b2} = 0.0035.$$

Для двухлинейной диаграммы работы арматуры согласно пп. 6.2.11-6.2.14 [1]:

$$\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s} = \frac{347\,826}{200\,000\,000} = 0.00174;$$

$$\varepsilon_{s2} = 0.025.$$

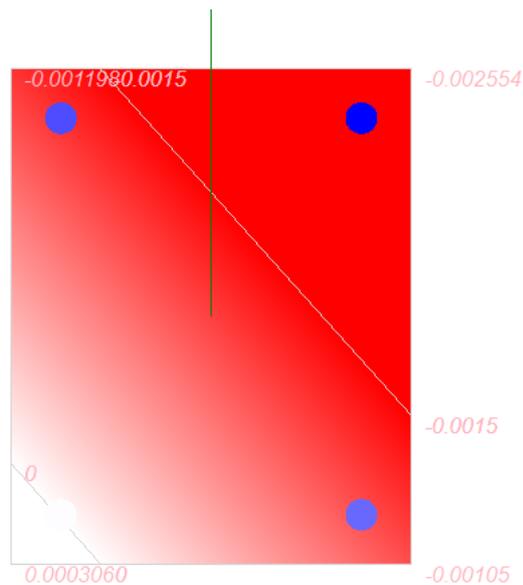
Для решения задачи воспользуемся подходом «от обратного»: получив значения неизвестных  $\frac{1}{r_x}$ ,  $\frac{1}{r_y}$  и  $\varepsilon_0$  из SV Plugins, решим уравнения равновесия внешних сил и внутренних усилий в нормальном сечении элемента (формулы 8.39-8.41 [1]). Если уравнения удовлетворятся, то полученное в SV Plugins решение корректно:

$$M_x(M_{33}) = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_0;$$

$$M_y(M_{22}) = D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \varepsilon_0;$$

$$N = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_0.$$

Деформации в бетоне, полученные в SV Plugins, представлены на рисунке ниже.



Относительные деформации бетона в сечении

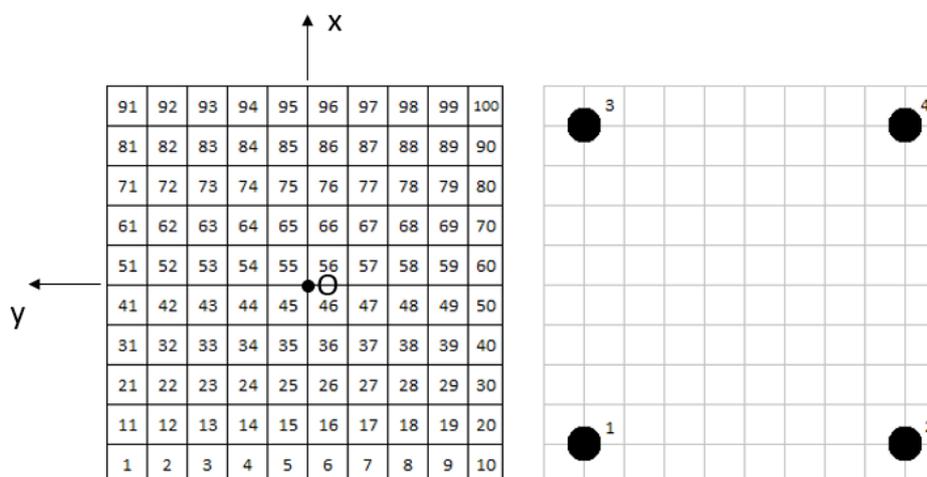
Отсюда:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\varepsilon_{top\,right} - \varepsilon_{bot\,right}}{h} = \frac{-0.002554 - (-0.001050)}{0.5} = -0.00301;$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\varepsilon_{bot\,left} - \varepsilon_{bot\,right}}{b} = \frac{0.000306 - (-0.001050)}{0.4} = 0.00339;$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{top\,right} + \varepsilon_{bot\,left}}{2} = \frac{-0.002554 + 0.000306}{2} = -0.00112.$$

Определим усилия в сечении. Для этого разделим сечение на 10x10 элементов по высоте и ширине. Нумерация участков бетона и нумерация стержней арматуры представлена на рисунке ниже.



Нумерация участков бетона и стержней арматуры в сечении

Жесткостные характеристики  $D_{ij}$  определяются по формулам 8.42-8.47 [1]:

$$D_{11} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi}^2 \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj}^2 \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{22} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{byi}^2 \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{syj}^2 \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{12} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{13} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{23} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{33} = \sum_i A_{bi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj},$$

где

$$A_{bi} = \frac{h}{10} \cdot \frac{b}{10} = \frac{0.5}{10} \cdot \frac{0.4}{10} = 0.002 \text{ м}^2 \text{ – площадь } i\text{-го участка бетона};$$

$$A_{sj} = \pi \cdot \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 = 3.14 \cdot \left(\frac{0.032}{2}\right)^2 = 0.000804 \text{ м}^2 \text{ – площадь } j\text{-го арматурного стержня};$$

$Z_{bxi}, Z_{byi}$  – координаты центра тяжести  $i$ -го участка бетона;

$Z_{sxj}, Z_{syj}$  – координаты центра тяжести  $j$ -го арматурного стержня;

$\nu_{bi}$  – коэффициент упругости бетона  $i$ -го участка;

$\nu_{sj}$  – коэффициент упругости  $j$ -го стержня арматуры.

Коэффициенты упругости определяются по формулам 8.35-8.36 [1]:

$$\nu_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \cdot \varepsilon_{bi}};$$

$$\nu_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}};$$

где  $\varepsilon_{bi}$  и  $\varepsilon_{sj}$  определяются по формулам 8.29-8.30 [1]:

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} \cdot Z_{bxi} + \frac{1}{r_y} \cdot Z_{byi};$$

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} \cdot Z_{sxj} + \frac{1}{r_y} \cdot Z_{syj};$$

$\sigma_{bi}$  и  $\sigma_{sj}$  – напряжения в  $i$ -ом участке бетона и в  $j$ -ом арматурном стержне соответственно.

Согласно п. 6.1.21 [1] напряжения в бетоне определяются как:

- при  $0 \leq \varepsilon_{bi} < \varepsilon_{b1}$ :  $\sigma_{bi} = E_{b,red} \cdot \varepsilon_{bi}$
- при  $\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_{bi} \leq \varepsilon_{b2}$ :  $\sigma_{bi} = R_b$ ,

где

$$E_{b,red} = \frac{R_b}{\varepsilon_{b1,red}} = \frac{14\,321}{0.0015} = 9\,487\,179 \text{ кПа.}$$

Согласно п. 6.2.14 [1] напряжения в арматуре определяются как:

- при  $0 \leq \varepsilon_{sj} < \varepsilon_{s0}$ :  $\sigma_{sj} = E_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}$
- при  $\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{s2}$ :  $\sigma_{sj} = R_s$  или  $\sigma_{sj} = R_{sc}$ .

Фрагменты таблиц с вычислением жесткостных характеристик приведены ниже.

#### Бетон

$i$	$Z_{bxi}$	$Z_{byi}$	$\varepsilon_{bi}$	$\sigma_{bi}$	$\nu_{bi}$	$D_{11}$	$D_{22}$	$D_{12}$	$D_{13}$	$D_{23}$	$D_{33}$
					<b>Сумма</b>	<b>33987</b>	<b>21867</b>	<b>3495</b>	<b>-2330</b>	<b>1107</b>	<b>1750200</b>
1	-0.2250	0.1800	0.00016	0	0.000	0	0	0	0	0	0
2	-0.2250	0.1400	0.00003	0	0.000	0	0	0	0	0	0
3	-0.2250	0.1000	-0.00011	-1027	0.316	961	190	-427	-4269	1897	18974
...											
98	0.2250	-0.1000	-0.00214	-14231	0.222	673	133	-299	2993	-1330	13301
99	0.2250	-0.1400	-0.00228	-14231	0.208	633	245	-394	2814	-1751	12508
100	0.2250	-0.1800	-0.00241	-14231	0.197	598	382	-478	2656	-2125	11805

#### Арматура

$j$	$Z_{sxj}$	$Z_{syj}$	$\varepsilon_{sj}$	$E_{sj}$	$\sigma_{sj}$	$\nu_{sj}$	$D_{11}$	$D_{22}$	$D_{12}$	$D_{13}$	$D_{23}$	$D_{33}$
						<b>Сумма</b>	<b>24310</b>	<b>13675</b>	<b>1069</b>	<b>-7127</b>	<b>5345</b>	<b>607762</b>
1	-0.2000	0.1500	-0.00001	200000000	-2780	1	6434	3619	-4825	-32170	24127	160850
2	-0.2000	-0.1500	-0.00103	200000000	-206180	1	6434	3619	4825	-32170	-24127	160850
3	0.2000	0.1500	-0.00122	200000000	-243420	1	6434	3619	4825	32170	24127	160850
4	0.2000	-0.1500	-0.00223	200000000	-347826	0.7784	5009	2817	-3756	25043	-18782	125213

Тогда усилия в сечении:

$$D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_0 = (33\,987 + 24\,310) \cdot (-0.00301) + \\ + (3\,495 + 1\,069) \cdot (0.00339) + (-2\,330 - 7\,127) \cdot (-0.00112) = -149.3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \varepsilon_0 = (3\,495 + 1\,069) \cdot (-0.00301) + \\ + (21\,867 + 13\,675) \cdot (0.00339) + (1\,107 + 5\,345) \cdot (-0.00112) = 99.5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_0 = (-2\,330 - 7\,127) \cdot (-0.00301) + \\ + (1\,107 + 5\,345) \cdot (0.00339) + (1\,750\,200 + 607\,762) \cdot (-0.00112) = -2\,600.0 \text{ кН}.$$

Так как обозначение момента и направление осей на рисунке 8.5 [1] отличается от принятых в программе, то:

$$M_y(M_{33}) = 149.3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

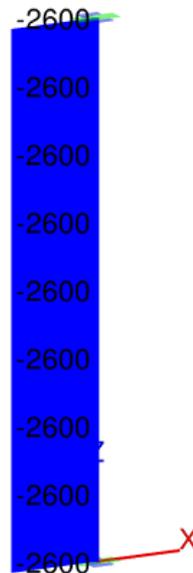
$$M_x(M_{22}) = 99.5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N = -2\,600 \text{ кН}.$$

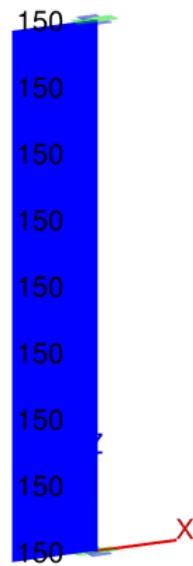
#### РАСЧЁТ В ПЛАГИНЕ



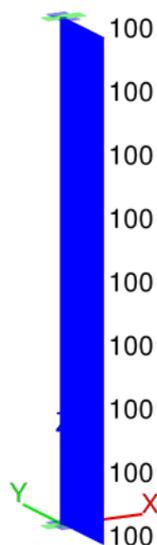
Общий вид модели



Продольные усилия, кН



Изгибающие моменты  $M_{33}$ , кН·м



Изгибающие моменты  $M_{22}$ , кН·м

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Параметр для сравнения	SV Plugins	Аналитический расчёт	Отн. погрешность, %
Продольное усилие $N$ в сечении, кН	-2 600	-2 600	0.0
Момент $M_{33}$ в сечении, кН·м	149.3	150	0.5
Момент $M_{22}$ в сечении, кН·м	99.5	100	0.5

ССЫЛКИ

1. СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (с Изменением N 1). Москва, 2019.