

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОЙ КОЛОННЫ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

ОПИСАНИЕ ПРИМЕРА

Рассматривается железобетонная колонна нижнего этажа рамного каркаса круглого сечения диаметром $d = 400$ мм. Высота колонны 4.8 м. Используется тяжёлый бетон класса В25 и арматура класса А400. Площадь сечения арматуры $A_{s,tot} = 3\,140$ мм² (10Ø20). Защитный слой арматуры $a = 35$ мм.

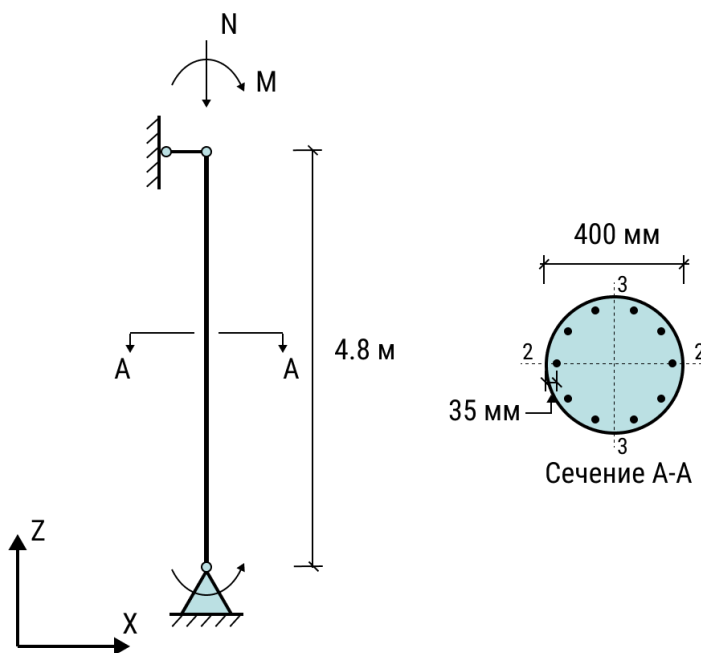
Продольные силы и моменты в верхнем опорном сечении от нагрузок:

- вертикальных постоянных и длительных $N_l = 1\,700$ кН, $M_l = 60$ кН · м;
- от ветровых $N_h = 100$ кН, $M_h = 45$ кН · м,
- кратковременные вертикальные нагрузки отсутствуют.

Определяется прочность колонны при внецентренном сжатии. Коэффициент расчётной длины колонны $\mu_x = 1.0$. Конструкция статически неопределима.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для получения требуемых усилий в сечении колонны условия опирания и приложение нагрузок моделируются упрощённо.



Свойства сечения

$d = 400$ мм

– диаметр сечения

$a = 35$ мм

– защитный слой до центра тяжести арматуры

$A_{s,tot} = 3\,140$ мм²

– общая площадь сечения продольной арматуры

Свойства материалов

Бетон В25

| | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| $E_b = 30\,000\,000 \text{ кН/м}^2$ | – модуль упругости |
| $R_{bn} = 18\,500 \text{ кН/м}^2$ | – нормативное сопротивление сжатию |

Арматура А400 – продольная

| | |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| $E_s = 200\,000\,000 \text{ кН/м}^2$ | – модуль упругости |
| $R_{sn} = 400\,000 \text{ кН/м}^2$ | – нормативное сопротивление |

Коэффициенты

| | |
|---------------------|-----------------------------------------------|
| $\gamma_b = 1.3$ | – коэффициент надёжности по бетону при сжатии |
| $\gamma_{b1} = 1.0$ | – коэффициенты условий работы бетона |
| $\gamma_{b2} = 1.0$ | |
| $\gamma_{b3} = 1.0$ | |
| $\gamma_{b4} = 1.0$ | |
| $\gamma_{b5} = 1.0$ | |
| $\gamma_s = 1.15$ | – коэффициент надёжности по арматуре |

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ

Расчёт производится с использованием формул раздела 8 [1].

Определяем расчётные характеристики бетона и арматуры.

Согласно формуле 6.1 и положениям п. 6.1.12 [1] определяем расчётное сопротивление бетона осевому сжатию:

$$R_b = \frac{R_{bn}}{\gamma_b} \cdot \gamma_{b1} \cdot \gamma_{b2} \cdot \gamma_{b3} \cdot \gamma_{b4} \cdot \gamma_{b5} = \frac{18\,500}{1.3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.0 = 14\,231 \text{ кПа.}$$

Согласно формуле 6.10 и положениям п. 6.2.8 [1] определяем расчётное сопротивление продольной арматуры класса А400 на растяжение и сжатие:

$$R_s = \frac{R_{sn}}{\gamma_s} = \frac{400\,000}{1.15} = 347\,826 \text{ кПа;}$$

$$R_{sc} = R_s = 347\,826 \text{ кПа} < 400\,000 \text{ кПа.}$$

Максимальные усилия в элементе.

$$N = N_l + N_h = 1\,700 + 100 = 1\,800 \text{ кН;}$$

$$M = M_l + M_h = 60 + 45 = 105 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Согласно п. 8.1.7 [1] находим эксцентриситеты для статически неопределимой конструкции:

$$e_a = \max\left(\frac{1}{600} \cdot l; \frac{1}{30} \cdot h; 10 \text{ мм}\right) = \max(0.008; 0.0133; 0.01) = 0.0133 \text{ м};$$

$$e_{st} = \frac{M}{N} = \frac{105}{1\,800} = 0.0583 \text{ м};$$

$$e_0 = e_{st} = 0.0583 \text{ м} > e_a = 0.0133 \text{ м}.$$

Находим коэффициент влияния прогиба элемента на его прочность $e_0 \cdot \eta$.

$$\frac{l_0}{i} = \frac{4.8}{0.100} = 48.00 > 14,$$

где

$$l_0 = 1.0 \cdot l = 4.8 \text{ м} - \text{расчётная длина элемента};$$

$$i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0.001257}{0.12567}} = 0.100 \text{ м} - \text{радиус инерции}.$$

Коэффициент η рассчитывается согласно формуле 8.14 и положениям п. 8.1.15 [1]:

$$r_s = r - a = 0.2 - 0.035 = 0.165 \text{ м} - \text{радиус окружности, проходящей через центры тяжести стержней продольной арматуры};$$

$$M_1 = M + N \cdot r_s = 105 + 1\,800 \cdot 0.165 = 402 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{l1} = M_l + N_l \cdot r_s = 60 + 1\,700 \cdot 0.165 = 340.5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_l = 1 + \frac{M_{l1}}{M_1} = 1 + \frac{340.5}{402} = 1.847;$$

$$0.15 > \delta_e = \frac{e_0}{h} = \frac{0.0583}{0.4} = 0.146 < 1.5, \text{ тогда } \delta_e = 0.15;$$

$$k_s = 0.7;$$

$$k_b = \frac{0.15}{\varphi_l \cdot (0.3 + \delta_e)} = \frac{0.15}{1.847 \cdot (0.3 + 0.15)} = 0.180;$$

$$I_b = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{3.14 \cdot 0.2^4}{4} = 0.001257 \text{ м}^4;$$

$$I_s = \frac{A_{s,tot} \cdot (r - a)^2}{2} = \frac{0.003140 \cdot (0.2 - 0.035)^2}{2} = 0.000043 \text{ м}^4;$$

$$D = k_b \cdot E_b \cdot I_b + k_s \cdot E_s \cdot I_s = 0.180 \cdot 30\,000\,000 \cdot 0.001257 + 0.7 \cdot 200\,000\,000 \cdot 0.000043 = 12\,788 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot D}{l_0^2} = \frac{3.14^2 \cdot 12\,788}{4.8^2} = 5\,478 \text{ кН};$$

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{1\,800}{5\,478}} = 1.489.$$

Тогда момент с учётом влияния прогиба:

$$M = N \cdot e_0 \cdot \eta = 1\,800 \cdot 0.0583 \cdot 1.489 = 156.4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем относительные деформации бетона и арматуры. Для двухлинейной диаграммы работы бетона согласно п. 6.1.19 [1]:

$$\varepsilon_{b1} = \frac{R_b}{E_{b,red}} = \varepsilon_{b1,red} = 0.0015;$$

$$\varepsilon_{b2} = 0.0035.$$

Для двухлинейной диаграммы работы арматуры согласно пп. 6.2.11-6.2.14 [1]:

$$\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s} = \frac{347\,826}{200\,000\,000} = 0.00174;$$

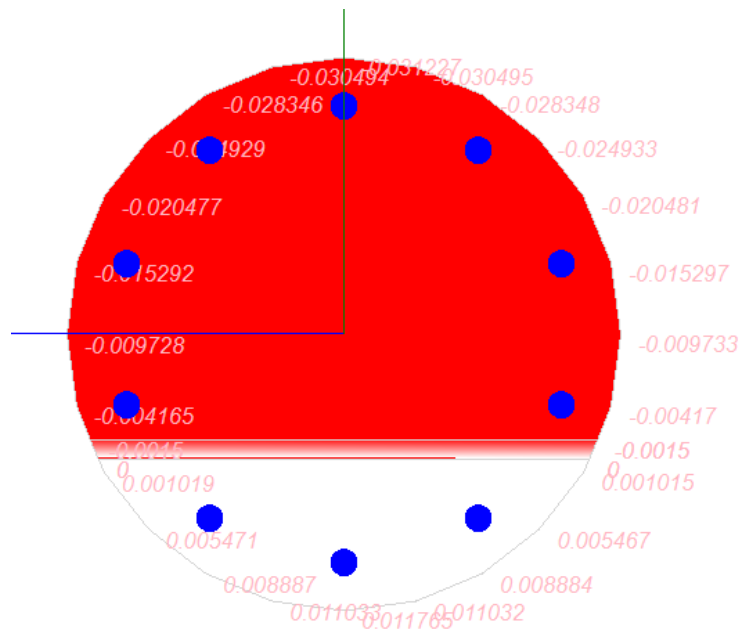
$$\varepsilon_{s2} = 0.025.$$

Для решения задачи воспользуемся подходом «от обратного»: получив значения неизвестных $\frac{1}{r_x}$, $\frac{1}{r_y}$ и ε_0 из SV Plugins, решим уравнения равновесия внешних сил и внутренних усилий в нормальном сечении элемента (формулы 8.39-8.41 [1]). Если уравнения удовлетворятся, то полученное в SV Plugins решение корректно:

$$M_x(M_{33}) = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_0;$$

$$N = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_0.$$

Деформации в бетоне, полученные в SV Plugins, представлены на рисунке ниже.



Относительные деформации бетона в сечении

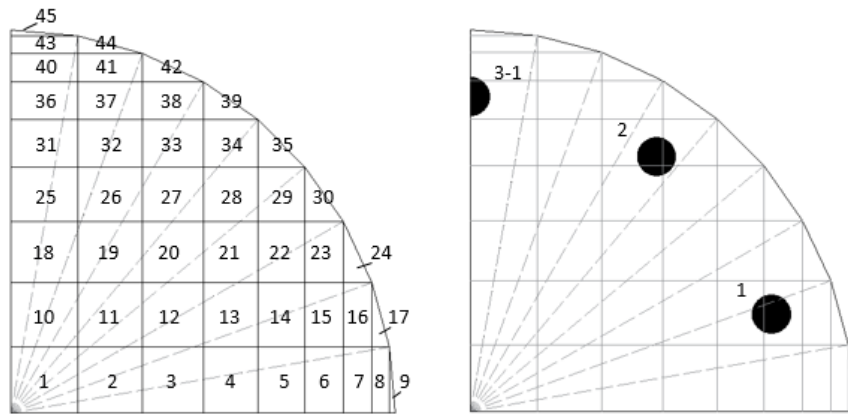
Отсюда:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\varepsilon_{top} - \varepsilon_{bot}}{d} = \frac{-0.031227 - 0.011765}{0.4} = -0.107480;$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\varepsilon_{left} - \varepsilon_{right}}{d} = \frac{-0.009728 - (-0.009733)}{0.4} = 0.000012;$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{top} + \varepsilon_{bot}}{2} = \frac{-0.031227 + 0.011765}{2} = -0.009731.$$

Определим усилия в сечении. Для этого разделим сечение на простые прямоугольные и треугольные участки, опираясь на координатную сетку (радиусы, проведенные через каждые 10°). Нумерация участков бетона и нумерация стержней арматуры для четверти сечения представлена на рисунке ниже. Для остальных четвертей сечения картина симметрична.



Нумерация участков бетона и стержней арматуры в четверти сечения

Жесткостные характеристики D_{ij} определяются по формулам 8.42-8.47 [1]:

$$D_{11} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi}^2 \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj}^2 \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{12} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{13} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{23} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

$$D_{33} = \sum_i A_{bi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj},$$

где

A_{bi} – площадь i -го участка бетона;

A_{sj} – площадь j -го арматурного стержня;

Z_{bxi}, Z_{byi} – координаты центра тяжести i -го участка бетона;

Z_{sxj}, Z_{syj} – координаты центра тяжести j -го арматурного стержня;

ν_{bi} – коэффициент упругости бетона i -го участка;

ν_{sj} – коэффициент упругости j -го стержня арматуры.

Коэффициенты упругости определяются по формулам 8.35-8.36 [1]:

$$\nu_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \cdot \varepsilon_{bi}};$$

$$\nu_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}},$$

где ε_{bi} и ε_{sj} определяются по формулам 8.29-8-30 [1]:

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} \cdot Z_{bxi} + \frac{1}{r_y} \cdot Z_{byi};$$

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} \cdot Z_{sxj} + \frac{1}{r_y} \cdot Z_{syj};$$

σ_{bi} и σ_{sj} – напряжения в i -ом участке бетона и в j -ом арматурном стержне соответственно.

Согласно п. 6.1.21 [1] напряжения в бетоне определяются как:

- при $0 \leq \varepsilon_{bi} < \varepsilon_{b1}$: $\sigma_{bi} = E_{b,red} \cdot \varepsilon_{bi}$;
- при $\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_{bi} \leq \varepsilon_{b2}$: $\sigma_{bi} = R_b$,

где

$$E_{b,red} = \frac{R_b}{\varepsilon_{b1,red}} = \frac{14\,321}{0.0015} = 9\,487\,179 \text{ кПа.}$$

Согласно п. 6.2.14 [1] напряжения в арматуре определяются как:

- при $0 \leq \varepsilon_{sj} < \varepsilon_{s0}$: $\sigma_{sj} = E_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}$;
- при $\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{s2}$: $\sigma_{sj} = R_s$ или $\sigma_{sj} = R_{sc}$.

Фрагменты таблиц с вычислением жесткостных характеристик приведены ниже.

Бетон

| i | A_{bi} | Z_{bxi} | Z_{byi} | ε_{bi} | σ_{bi} | ν_{bi} | D_{11} | D_{12} | D_{13} | D_{23} | D_{33} |
|-----|-------------|-----------|-----------|--------------------|---------------|--------------|-------------|----------|--------------|----------|---------------|
| | | | | | | Сумма | 1263 | 0 | -8193 | 3 | 228865 |
| 1 | 0.001206148 | 0.0174 | -0.0174 | -0.01160 | -14231 | 0.041 | 0 | 0 | 26 | -26 | 1480 |
| 2 | 0.001169499 | 0.0174 | -0.0516 | -0.01160 | -14231 | 0.041 | 0 | -1 | 25 | -74 | 1435 |
| 3 | 0.001097317 | 0.0174 | -0.0842 | -0.01160 | -14231 | 0.041 | 0 | -2 | 23 | -113 | 1346 |
| ... | | | | | | | | | | | |
| 43 | 0.000313366 | 0.1925 | -0.0174 | -0.03042 | -14231 | 0.016 | 5 | 0 | 28 | -3 | 147 |
| 44 | 0.000151922 | 0.1909 | -0.0460 | -0.03025 | -14231 | 0.016 | 3 | -1 | 14 | -3 | 71 |
| 45 | 5.27621E-05 | 0.1980 | -0.0116 | -0.03101 | -14231 | 0.015 | 1 | 0 | 5 | 0 | 24 |
| ... | | | | | | | | | | | |
| 178 | 0.000313366 | -0.1925 | -0.0174 | 0.01095 | 0 | 0.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 179 | 0.000151922 | -0.1909 | -0.0460 | 0.01079 | 0 | 0.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 180 | 5.27621E-05 | -0.1980 | -0.0116 | 0.01155 | 0 | 0.000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

▪

Арматура

| j | A_{sj} | Z_{sxj} | Z_{syj} | ε_{sj} | E_{sj} | σ_{sj} | ν_{sj} | D_{11} | D_{12} | D_{13} | D_{23} | D_{33} |
|-----|------------|-----------|-----------|--------------------|-----------|---------------|--------------|-------------|----------|--------------|----------|---------------|
| | | | | | | | Сумма | 1656 | 0 | -8593 | 3 | 139831 |
| 1 | 0.00031416 | 0.0510 | -0.1569 | -0.01521 | 200000000 | -347826 | 0.114 | 19 | -57 | 366 | -1127 | 7183 |
| 2 | 0.00031416 | 0.1335 | -0.0970 | -0.02408 | 200000000 | -347826 | 0.072 | 81 | -59 | 606 | -440 | 4538 |
| 3-1 | 0.00015708 | 0.1650 | 0.0000 | -0.02747 | 200000000 | -347826 | 0.063 | 54 | 0 | 328 | 0 | 1989 |
| ... | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0.00031416 | -0.0510 | -0.1569 | -0.00425 | 200000000 | -347826 | 0.409 | 67 | 206 | -1310 | -4032 | 25694 |
| 11 | 0.00031416 | -0.1335 | -0.0970 | 0.00462 | 200000000 | 347826 | 0.377 | 422 | 307 | -3161 | -2296 | 23677 |
| 9-2 | 0.00015708 | -0.1650 | 0.0000 | 0.00800 | 200000000 | 347826 | 0.217 | 186 | 0 | -1126 | 0 | 6827 |

Тогда усилия в сечении:

$$D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_0 = (1\,263 + 1\,656) \cdot (-0.107480) +$$

$$+ (0 + 0) \cdot (0.000012) + (-8\,193 - 8\,593) \cdot (-0.009731) = -150.5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_0 = (-8\,193 - 8\,593) \cdot (-0.107480) +$$

$$+(3 + 3) \cdot (0.000012) + (228\,865 + 139\,831) \cdot (-0.009731) = -1\,783.56 \text{ кН}.$$

Так как обозначение момента и направление осей на рисунке 8.5 [1] отличается от принятых в программе, то:

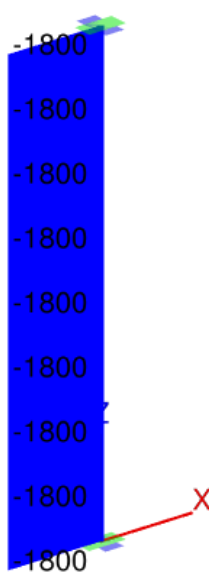
$$M_y(M_{33}) = 150.45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N = -1\,783.56 \text{ кН}.$$

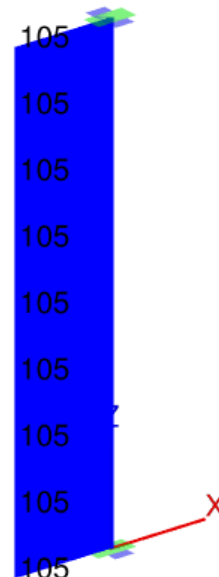
РАСЧЁТ В ПЛАГИНЕ



Общий вид модели



Продольные усилия, кН



Изгибающие моменты M_{33} , кН·м

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

| Параметр для сравнения | SV Plugins | Аналитический расчёт | Отн. погрешность, % |
|-------------------------------------|------------|----------------------|---------------------|
| Продольное усилие N в сечении, кН | -1 783.56 | -1 800 | 0.9 |
| Момент M_{33} в сечении, кН·м | 150.45 | 156.39 | 3.8 |

ССЫЛКИ

1. СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (с Изменением N 1). Москва, 2019.